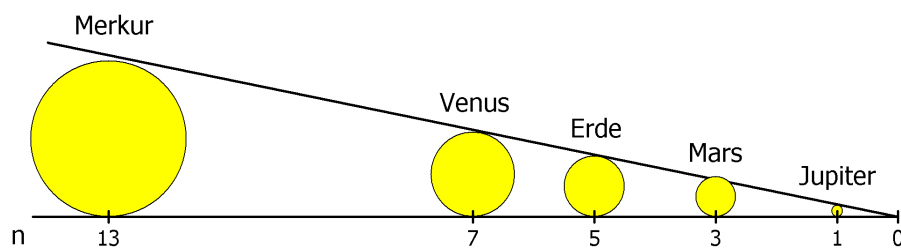


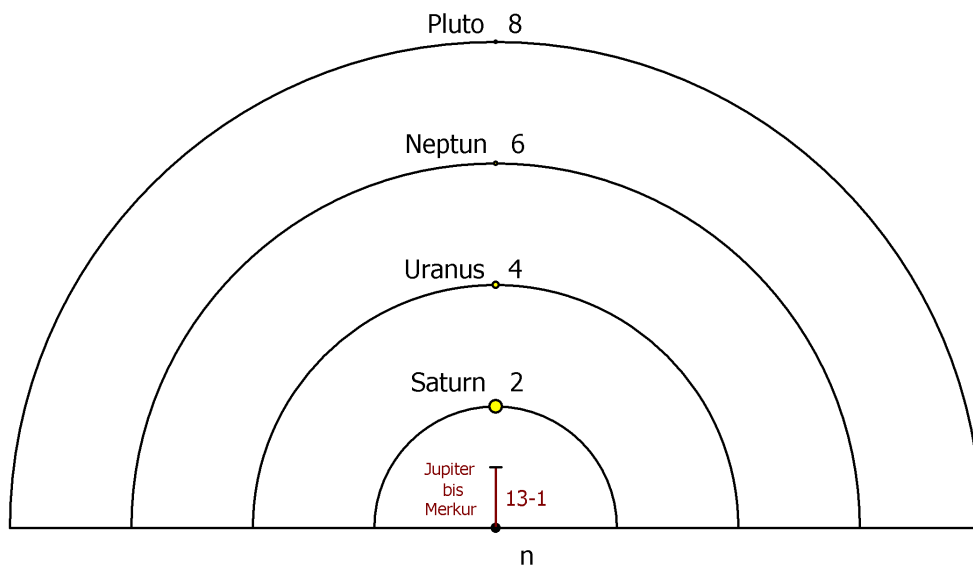
Eine Planetenreihe

Klaus Weißinger

15. Oktober 2012



Sonnenscheiben von den Planeten aus gesehen



Sonnenscheiben von den Planeten aus gesehen
(im Vergleich zu oben doppelter Durchmesser)

1 Die Reihe

Hier soll eine mathematische Reihe¹ vorgestellt werden, mit welcher die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne relativ genau bestimmt werden.

Der mittlere Abstand r_n eines Planeten n von der Sonne beträgt näherungsweise:

$$r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n} \text{ AE}$$

Zur Erläuterung:

1. Eine weitere Schreibweise wäre $r_n = 5 \cdot n^{((-1)^n)} \text{ AE}$
2. n ist eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)
3. Die astronomische Einheit (AE) wird in der Astronomie dazu verwendet, Planetenentfernungen anzugeben. Der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne (149,6 Mio km) wird dabei 1 AE zugeordnet. Berechnet man alle Planetenentfernungen in diese Einheit um, lassen sie sich untereinander handlicher vergleichen.

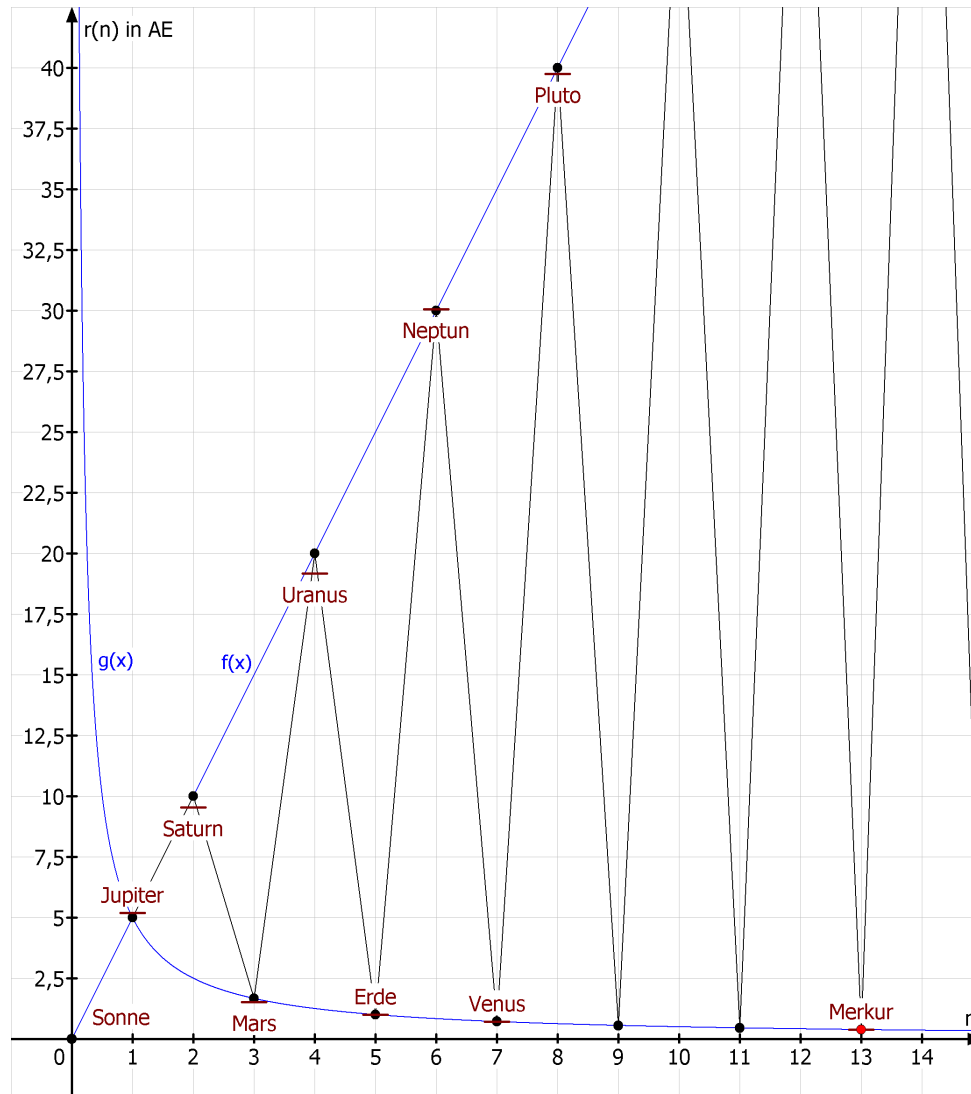
Die Formel $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n} \text{ AE}$ liefert eine Zahlenfolge, da jeder natürlichen Zahl n (1,2,3, ...) sowie der Zahl 0 eine Zahl r_n zugeordnet werden kann.² Aus der unendlichen Zahlenreihe, die sich dabei ergibt, liefern gerade die ersten acht und die dreizehnte die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne. Das Zentralgestirn fügt sich als Ausgangspunkt, von dem die Entfernungen gemessen werden, mit dem Anfangsindex 0 passend in die Reihe ein. Wenngleich Pluto seit dem 24. August 2006 der Planetenstatus aberkannt wurde und seitdem zu den Zwergplaneten zählt, soll er in der hier vorgestellten Planetenreihe weiter enthalten sein, da seine Entfernung von der Sonne recht genau mit $n=8$ übereinstimmt.

¹Mathematisch eigentlich eine Folge.

Der vorliegende Aufsatz ist eine Überarbeitung der Erstveröffentlichung des Autors in *Nightsky* 2/2002, S.64-67

²Bei der Berechnung von $n^{(-1)^n}$ ist zu beachten, dass der Exponent $(-1)^n$ für alle geraden n als Ergebnis +1, für alle ungeraden -1 ergibt. Erhält man +1, so gilt: $n^1 = n$, erhält man -1, so gilt: $n^{-1} = 1/n$. Man erhält also als Ergebnis eine alternierende Reihe, in der stets eine ganzzahlige (gerade) Zahl mit einem Bruch (Nenner ungerade) wechselt.

Abb.1: Die Planetenreihe $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n} \text{AE}$



Erläuterungen

Funktionsgleichungen: $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n} \text{AE}$ $f(x) = 5 \cdot n^1 \text{AE}$ $g(x) = 5 \cdot n^{-1} \text{AE}$

AE: Astronomische Einheit

Die schwarzen Punkte stellen die Ergebnisse der Reihe dar (zur Verdeutlichung verbunden mit schwarzen Linien), während die roten Geraden die wirklichen mittleren Abstände der Planeten angeben. Die beiden Funktionsgleichungen $f(x)$ und $g(x)$ verdeutlichen visuell den Aufbau von $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n}$.

Abb.2: Die Planetenreihe $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n}$ AE im tabellarischen Überblick

n	Planet	$r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n}$	Ent- fernung	wirkl. Entf.	Diff. in %
0	Sonne	$r_0 = 5 \cdot 0^{(-1)^0} = 5 \cdot 0^{(1)} = 5 \cdot 0 = 0 = 0,00$		0,00	0,00
1	Jupiter	$r_1 = 5 \cdot 1^{(-1)^1} = 5 \cdot 1^{(-1)} = 5 \cdot 1/1 = 5 = 5,00$		5,20	-3,85
2	Saturn	$r_2 = 5 \cdot 2^{(-1)^2} = 5 \cdot 2^{(1)} = 5 \cdot 2 = 10 = 10,00$		9,54	4,82
3	Mars	$r_3 = 5 \cdot 3^{(-1)^3} = 5 \cdot 3^{(-1)} = 5 \cdot 1/3 = 5/3 = 1,67$		1,52	9,87
4	Uranus	$r_4 = 5 \cdot 4^{(-1)^4} = 5 \cdot 4^{(1)} = 5 \cdot 4 = 20 = 20,00$		19,18	4,28
5	Erde	$r_5 = 5 \cdot 5^{(-1)^5} = 5 \cdot 5^{(-1)} = 5 \cdot 1/5 = 5/5 = 1,00$		1,00	0,00
6	Neptun	$r_6 = 5 \cdot 6^{(-1)^6} = 5 \cdot 6^{(1)} = 5 \cdot 6 = 30 = 30,00$		30,06	-0,20
7	Venus	$r_7 = 5 \cdot 7^{(-1)^7} = 5 \cdot 7^{(-1)} = 5 \cdot 1/7 = 5/7 = 0,71$		0,72	-1,39
8	Pluto	$r_8 = 5 \cdot 8^{(-1)^8} = 5 \cdot 8^{(1)} = 5 \cdot 8 = 40 = 40,00$		39,75	0,63
9		$r_9 = 5 \cdot 9^{(-1)^9} = 5 \cdot 9^{(-1)} = 5 \cdot 1/9 = 5/9 = 0,56$			
10		$r_{10} = 5 \cdot 10^{(-1)^{10}} = 5 \cdot 10^{(1)} = 5 \cdot 10 = 50 = 50,00$			
11		$r_{11} = 5 \cdot 11^{(-1)^{11}} = 5 \cdot 11^{(-1)} = 5 \cdot 1/11 = 5/11 = 0,45$			
12		$r_{12} = 5 \cdot 12^{(-1)^{12}} = 5 \cdot 12^{(1)} = 5 \cdot 12 = 60 = 60,00$			
13	Merkur	$r_{13} = 5 \cdot 13^{(-1)^{13}} = 5 \cdot 13^{(-1)} = 5 \cdot 1/13 = 5/13 = 0,38$		0,39	-2,56

Die Abweichungen von den wirklichen mittleren Entfernungen der Planeten sind überwiegend recht gering. Es fällt auf, dass die prozentualen Differenzen für die Planeten $n = 1$ bis $n = 4$ deutlich größer ausfallen als die der anderen. Hervorzuheben ist, dass es bei der Erde (und auch bei der Sonne) keine Abweichung gibt. Der Mittelwert der Beträge der prozentualen Abweichungen aller Planeten beträgt 3,07 %, die Standardabweichung 0,3 AE.

Merkur gehört zwar in die Reihe hinein ($n = 13$) und auch seine Abweichung von der wirklichen mittleren Entfernung ist sehr gering. Zwischen ihm und den anderen Planeten treten allerdings vier Lücken in der Reihe auf (für $n = 9$ bis $n = 12$). Auf diese Tatsache soll weiter unten eingegangen werden.

Die Sonne als Mittelpunkt des Sonnensystems ist der natürliche Ausgangspunkt der Reihe $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n}$ AE mit dem Index 0. Die Funktionsgleichung $f(x) = 5 \cdot n^1$ AE (siehe Abb.1) beginnt bei der Sonne (0,0), setzt sich mit allen geraden n in linearer Weise bis ins Unendliche fort ($\lim_{n \text{ gerade}} \rightarrow \infty 5 \cdot n^1 = \infty$) und liefert jenseits Jupiter die nachfolgenden Planeten. Die Funktionsgleichung $g(x) = 5 \cdot n^{-1}$ AE (siehe Abb.1) dagegen liefert die Planeten in umgekehrter Weise ausgehend vom Jupiter bis zum Merkur und nähert sich bei ansteigenden n dem Wert 0 der Sonne ($\lim_{n \text{ ungerade}} \rightarrow \infty 5 \cdot n^{-1} = 0$).

Eine sehr offensichtliche Eigenschaft der Reihe besteht darin, dass die Abfolge der Planeten nicht der Abfolge im Planetensystem entspricht. Ordnet man jedoch die Planeten und die Sonne in der realen Reihenfolge an, so ergibt sich mit den dazugehörigen Zahlen n folgendes Bild:

Abb.3: Der Index n und die Planetenreihenfolge

SONNE	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
0	13	7	5	3	1	2	4	6	8

Auffällig ist dabei, dass alle Planetenzahlen vom Merkur bis zum Jupiter ungerade sind und sich von der Venus bis zum Jupiter in konstanter Weise verringern, während die Planeten vom Saturn bis zum Pluto in konstant aufsteigender Folge gerade Zahlen aufweisen, so dass sich eine sichtbare Ordnung ergibt.

Diese Ordnung zeigt sich auch recht anschaulich in dem Verhältnis der Größe der Sonnenscheiben von den Planeten aus. Man stelle sich vor, man besuche auf einer Reise alle neun Planeten und schaue von deren Oberfläche zur Sonne. Sie wird durch die Verschiedenheit der Blickwinkel in unterschiedlicher Größe gesehen. Der (halbe) Blickwinkel α errechnet sich durch das Verhältnis der Entfernung des Planeten r_p zum Radius der Sonne R_s (696.342 km) (siehe Abb.4):

$$\sin \alpha = \frac{R_s}{r_p} \quad \text{oder} \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{R_s}{r_p}\right)$$

Abb.4: Blickwinkel der Sonnenscheibe von einem Planeten aus

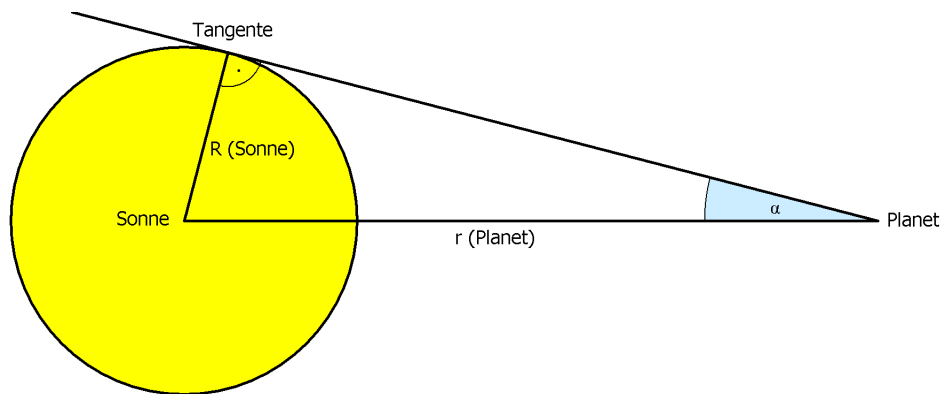


Abb.5: Die Blickwinkel der Sonnenscheiben und deren Größenverhältnisse

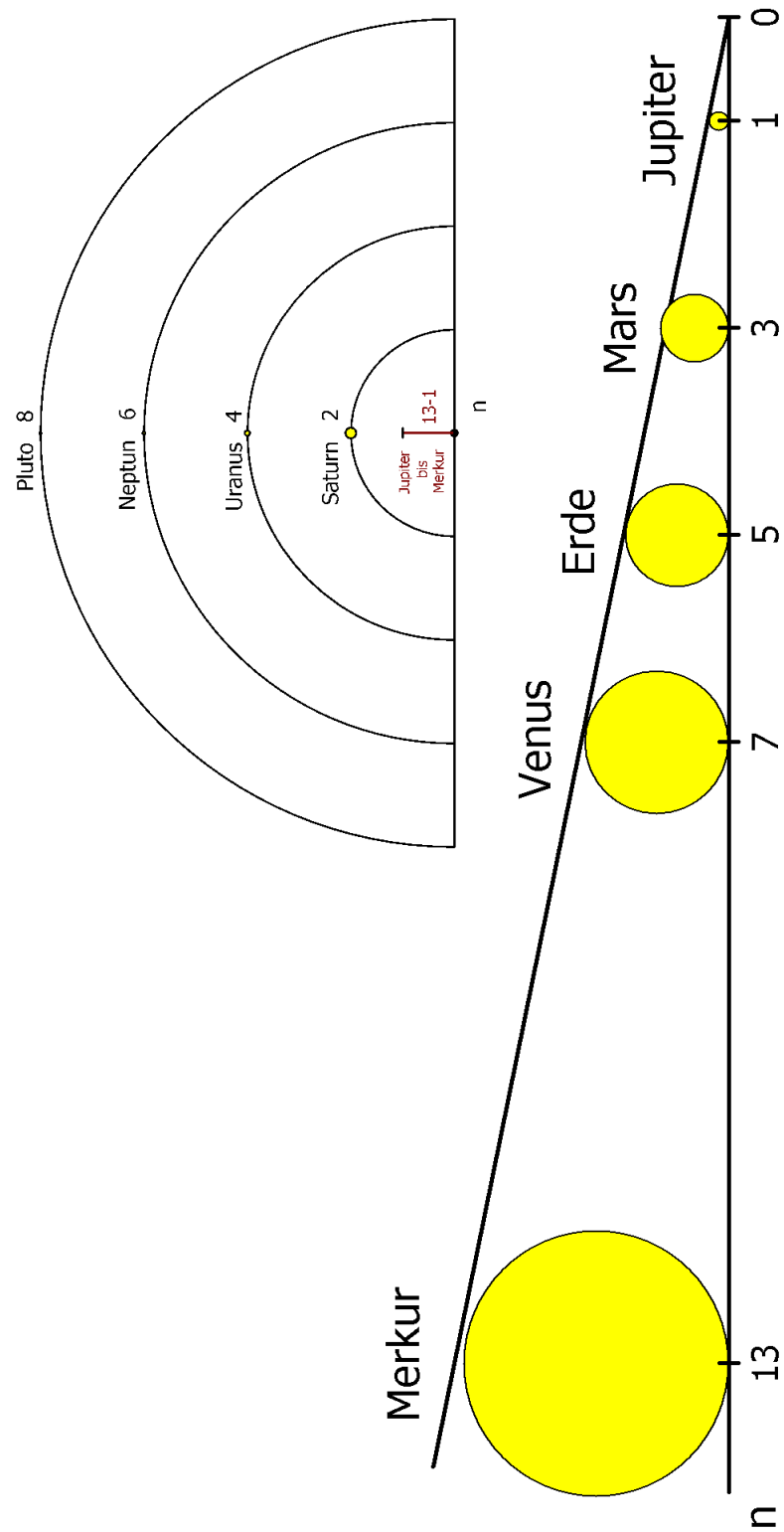
n	Planet	Blickwinkel in °: $\alpha = \arcsin(\frac{R_s}{r_p})$	Größenverhältnis der Sonnenscheiben in Bezug zur Erde
13	Merkur	0,0119353924	2,5641541834
7	Venus	0,0064648957	1,3888935483
5	Erde	0,0046547093	1
3	Mars	0,0030623025	0,6578933894
1	Jupiter	0,0008951333	0,1923070236
2	Saturn	0,0004879133	0,1048214286
4	Uranus	0,0002426847	0,0521374556
6	Neptun	0,0001548467	0,0332666797
8	Pluto	0,0001170992	0,0251571419

Aus den Größenverhältnissen, wie sie in Abb.5 ersichtlich sind, lassen sich die unterschiedlichen Sonnenscheiben aus Sicht der Planeten darstellen (Abb.6). Dabei zeigt sich, dass die Sonnenscheibengröße der Planeten mit $n = \textit{gerade}$ sich ab dem Saturn nach außen hin jeweils von Planet zu Planet halbiert, während sich die Sonnenscheibengröße der Planeten $n = \textit{ungerade}$ ab dem Jupiter nach innen hin mit $n/5$ vergrößert.

Jupiter erhält hier wie schon in Abb.1 ersichtlich eine Sonderstellung. Mit dem Index 1 steht er in der Mitte der 9 Planeten, die Sonnenscheibengröße halbiert sich zum Saturn hin und vergrößert sich mit $n/5$ zum Mars hin, so dass er tatsächlich die Mitte und gleichzeitig den Übergang zwischen den *geraden* n und den *ungeraden* bildet, was sich dadurch verdeutlicht, dass er derjenige ist, der im Schnittpunkt aller Funktionsgleichungen steht (Abb.1).

Die Abb.6 veranschaulicht das Verhältnis der Größe der Sonnenscheiben aller neun Planeten. Bei der Darstellung der Planeten Merkur bis Jupiter sind alle n linear im gleichen Abstand voneinander, was nicht den Verhältnissen der realen Entfernungen entspricht, jedoch den Grad der Exaktheit der Planetenreihe verdeutlicht. Die konzentrischen Halbkreise der Planeten Saturn bis Pluto geben die realen Abstände wieder. Die Größenverhältnisse der Sonnenscheiben sind bei allen neun Planeten in diesen beiden Darstellungen in Abb.6 direkt vergleichbar, wenn auch bei Neptun und Pluto aufgrund der Kleinheit kaum erkennbar.

Abb.6: Die Sonnenscheiben von den Planeten aus gesehen



2 Vergleich mit der Titius-Bodeschen Reihe

Um die Genauigkeit dieser Reihe und die genannten Abweichungen besser beurteilen zu können, sei sie mit der „Titius-Bodeschen Reihe“ verglichen, die von den Astronomen J.D. Titius und J.G. Bode am Ende des 18. Jahrhunderts aufgestellt wurde (siehe dtv-Atlas zur Astronomie (1973), S.55f).

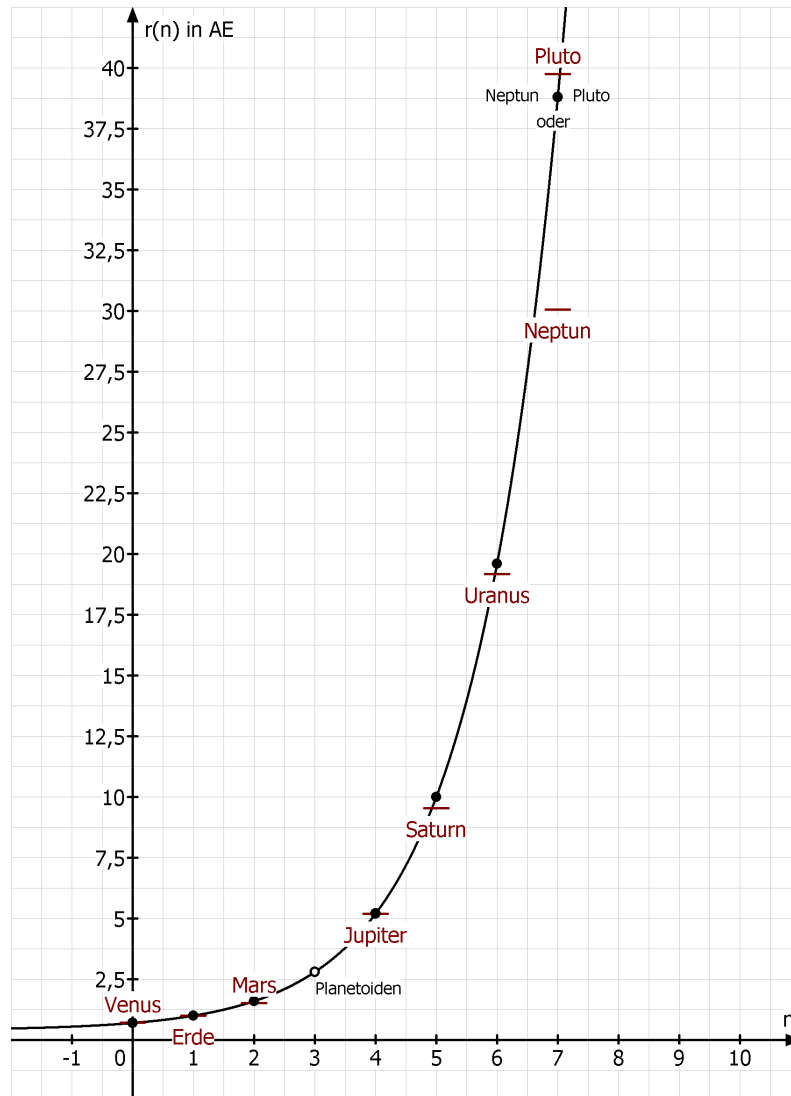
Danach beträgt der Abstand r eines Planeten: $r = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$

Abb.7: Die Titius-Bodesche Reihe im tabellarischen Überblick

n	Planet	Ent- fernung	wirkl. Entf.	Diff. in %
$-\infty$	Merkur	0,40	0,39	2,56
0	Venus	0,70	0,72	-2,78
1	Erde	1,00	1,00	0,00
2	Mars	1,60	1,52	5,26
3	Planetoiden	2,80		
4	Jupiter	5,20	5,20	0,00
5	Saturn	10,00	9,54	4,82
6	Uranus	19,60	19,18	2,19
7	Neptun	38,80	30,06	29,08
8	Pluto	77,20	39,46	95,64

„n ist dabei für Merkur $-\infty$, für Venus 0, für die Erde 1, für Mars 2, für den Mittelwert der Kleinplaneten 3, für Jupiter 4 usw. Dabei ist rechnerisch $2^{-\infty} = 0, 2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$ usw.“ (ebd., S.57).

Abb.8: Die Titius-Bode-Reihe $r = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$



Erläuterungen

Funktionsgleichung: $r = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$

AE: Astronomische Einheit

Die schwarzen Punkte auf der Funktionskurve stellen die Ergebnisse der Reihe dar, während die roten Geraden die wirklichen mittleren Abstände der Planeten angeben. Nicht darstellbar sind Merkur aufgrund des Indexwertes $n = -\infty$ sowie Pluto, der mit 77,2 AE Abstand weit entfernt ist von der realen Entfernung von 39,75 AE.

Die Werte bis zum Uranus stimmen recht gut mit den wirklichen Entfernungen überein. Bei Neptun und Pluto gibt es jedoch große Abweichungen bzw. die Frage, ob Neptun fehlt und dafür Pluto an seine Stelle tritt.

Lässt man diese beiden Planeten außer Betracht und vergleicht die beiden Reihen, so fällt auf, dass Mars die jeweils größte Abweichung von der mittleren Entfernung aufweist. An zweiter Stelle folgt in beiden Reihen dann der Saturn. Sehr auffallend ist auch die Sonderstellung des Merkurs. Bei der in diesem Aufsatz vorgestellten Reihe ist zwischen ihm und dem Wert des nächsten Planeten - wie schon erwähnt - eine Lücke.³ In der Titius-Bodeschen Reihe besitzt der Merkur den Wert $-\infty$, womit er also ebenfalls sehr deutlich aus der ansonsten wohlgeordneten linearen Reihe herausfällt (welche übrigens zusätzlich die Planetoiden, die Kleinplaneten zwischen der Mars- und Jupiterbahn beinhaltet).

Es sei bei der hier vorgestellten Reihe noch auf die Zahl 5 hingewiesen, die als konstanter Faktor in der Formel $r_n = 5 \cdot n^{(-1)^n} AE$ eine bedeutende Rolle spielt. Auffallend ist, dass sie hier ganzzahlig ist (man vergleiche dagegen die Zahlen der Titius-Bodeschen Reihe) und dass die Zahl der Erde ebenfalls 5 beträgt.

3 Fazit und Ausblick

Insgesamt kommt die hier vorgestellte Reihe der Wirklichkeit recht nahe. Problematisch ist die Lücke $n=9$ bis $n=12$, Streitbar sind ein paar wenige prozentuale Abweichungen mancher Planeten von der realen mittleren Entfernung zur Sonne und ungelöst ist die Frage: Wieso liefern die mittleren Abstände der Planeten von der Sonne sortiert die geraden (im Zähler) und ungeraden (im Nenner) natürlichen Zahlen?

Interessant wäre es herauszufinden, ob diese Planetenreihe nur für unser Sonnensystem gilt oder auch für andere. Vielleicht ist es so, dass andere Planetensysteme Planeten besitzen, die verschiedene Glieder der Reihe abdecken; unser Planetensystem „endet“ ja bei $n = 13$ und besitzt die Lücke von $n = 9$ bis $n = 12$. Denkbar wäre es auch, dass der Faktor 5 für jedes Planetensystem unterschiedlich sein könnte.

³Es fehlen $n=9$, $n=10$, $n=11$ und $n=12$. Es gilt jedoch für den Aphel des Pluto (der Punkt der Plutobahn, der am weitesten von der Sonne entfernt ist): $r_{10} = 5 \cdot 10 = 50AE$. Die wirkliche Entfernung ist 49,13 AE, die Differenz beträgt lediglich 1,77%. Ebenfalls einen guten Wert erreicht der Aphel des Merkur: $r_{11} = 5 \cdot 1/11 = 0,45AE$. Die wirkliche Entfernung ist 0,468 AE, die Differenz beträgt somit 2,87%. Trotz dieser zusätzlichen Übereinstimmungen, die man strenggenommen sowieso nicht in die Planetenreihe mit aufnehmen kann, bleiben für $n = 9$ und $n = 12$ immer noch zwei Lücken übrig.